مجله نخبگان علوم و مهندسی

Journal of Science and Engineering Elites

جلد ۷- شماره ۲ - سال ۱۴۰۱

www.ElitesJournal.ir

محاسبه عدد پی با دقت دل‌خواه توسط رایانه‌های ساده

محمدحسن غلامی

کارشناس ارشد مطالعات منطقه‌ای، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

gholamimohammad921@yahoo.com

ارسال: فروردین ماه ۱۴۰۱   پذیرش: خرداد ماه ۱۴۰۱

چکیده

در دهه‌های اخیر، استفاده از توان رایانه در ریاضیات، رشد چشم‌گیری داشته است. اثبات قضیه چهاررنگ به کمک رایانه، تنها یک نمونه از این امر است. در این مقاله، روشی کوتاه و قابل پیاده‌سازی با رایانه‌ای ساده برای محاسبه عدد پی، با امکان افزایش دل‌خواه دقت آن، ارائه می‌شود. این روش در دسترس اغلب افراد بوده و در زمانی اندک قابل انجام است و علاوه بر پرهیز از کاربرد سری‌های مثلثاتی و محاسبات پیچیده آن‌ها، با اثبات رابطه‌ای حدی برای تقریب عدد گنگ و ترافرازنده پی، درکی عملی از فرایند انتگرال‌گیری را نیز فراروی مخاطبان قرار می‌دهد.

کلمات کلیدی: عدد پی، برنامه‌نویسی رایانه‌ای، آنالیز ریاضی، حد.

۱– مقدمه

عدد پی از اعداد پراهمیت در ریاضیات است که مکرراً در شاخه‌های گوناگون این دانش مانند هندسه، آنالیز و مثلثات به چشم می‌خورد. افزون بر این، در سایر علوم مانند فیزیک نیز کاربرد دارد. این عدد به صورت نسبت محیط هر دایره به قطر همان دایره تعریف می‌شود. ثابت می‌شود که این نسبت برای همه دایره‌ها یکسان است [۱ و ۲]. از سوی دیگر، این عدد، گنگ [۳] و ترافرازنده یا متعالی است [۴]؛ یعنی نه‌تنها نمی‌توان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت [۵]، بلکه هیچ معادله چندجمله‌ای با ضریب‌های گویا نیز نمی‌توان یافت که ریشه آن، پی باشد. نتیجتاً اعشار این عدد در نمایش ده‌دهی، فاقد انتها و حتی تناوب منظم است. نتیجتاً محاسبه ثابت پی همواره با حدی از تقریب همراه است و روش‌هایی گوناگون دارد.

این مقاله با روشی هندسی برای به دست آوردن رابطه حدی محاسبه پی، ذکر مستقیم کد کوتاه محاسبه عدد پی در زبان‌های برنامه‌نویسی پایتون و VBA بر پایه رابطه یادشده و ایجاد امکان وارد کردن کد دوم در محیط ویژوال بیسیک برای برنامه‌های کاربردی، که در مجموعه آفیس تعبیه شده و امروزه در اغلب رایانه‌های خانگی در دسترس است، مخاطبان را از لزوم تسلط بر برنامه‌نویسی برای ساخت این برنامه بی‌نیاز می‌سازد.

۲– پیشینه پژوهش

در این جا به ذکر چند پژوهش متقدم درباره موضوع مقاله حاضر و وجه تمایز این تحقیق با آن‌ها می‌پردازیم. هاوارد ویتلی ایوز در بخش پایانی فصل چهارم جلد نخست کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات، تاریخچه‌ای مفصل از تلاش‌ها برای محاسبه عدد پی آورده

و به استفاده از رایانه در این راه نیز اشاره کرده است [۶]. جاناتان ام. بُروِین و میسن اس. مَکلِم در مقاله «زیست دیجیتال پی» به بررسی برخی سری‌های هم‌گرا به عدد پی یا وارون آن پرداخته و جدولی از تاریخ حصول تقریب‌های متفاوت پی از سال ۱۹۸۱ به دست داده‌اند [۷]. یُرگ آرندت و کریستُف هنل در کتاب پی آزاد شده، روش‌های تقریب زدن پی، از جمله روش‌های احتمالاتی، را بررسی کرده‌اند [۸]. در این پژوهش، افزون بر شرح و اثبات سری مورد استفاده، که از توابع مثلثاتی خالی است، برنامه رایانه‌ای مربوط به آن نیز آورده شده است.

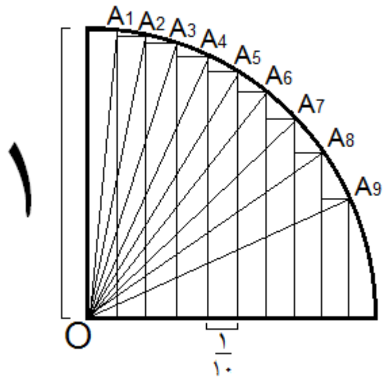
۳– متن اصلی

به دست آوردن رابطه‌ای حدی برای محاسبه عدد پی با دقت دل‌خواه، نخستین گام در راستای هدف ماست. برای رسیدن به رابطه‌ای که ما را در محاسبه عدد پی یاری رساند، دایره‌ای به شعاع یک واحد را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌شود که مساحت این دایره (S)، مانند هر دایره دل‌خواه، از ضرب مجذور شعاع (r) در نسبت محیط به قطر آن، که این نسبت را پی (π) می‌نامیم، به دست می‌آید؛ بنابراین مساحت دایره مورد نظر ما برابر است با:

(۱) مساحت دایره

$$S = \pi.r^2 = \pi.(۱)^۲ = \pi$$

حال یک ربع‌دایره از این دایره را در نظر می‌گیریم. از آن جا که دایره از ۴ ربع‌دایره برابر تشکیل می‌شود، مساحت این ربع‌دایره برابر با $\frac{\pi}{۴}$ خواهد بود. اکنون تلاش می‌کنیم از طریقی دیگر به محاسبه مساحت ربع‌دایره یادشده بپردازیم تا با استفاده از معادله‌ای که از برابر قرار دادن نتیجه آن با $\frac{\pi}{۴}$ حاصل می‌گردد، به عدد پی برسیم. شکل ۱ را که در ادامه ترسیم شده است در نظر می‌گیریم:



شکل ۱– تقسیم مساحت ربع‌دایره به نوارهای مستطیلی

در این شکل با ایجاد مستطیل‌هایی درون ربع‌دایره به محاسبه مساحت آن می‌پردازیم. گفتنی است ایده مرکزی آنالیز ریاضی برای محاسبه مساحت زیر منحنی‌ها در فرایند انتگرال‌گیری نیز تقسیم شکل به اجزای متعدد و جمع کردن مساحت هر یک از آن اجزاست. در ربع‌دایره شکل، یکی از شعاع‌ها، یعنی شعاع افقی، را به ۱۰ قسمت برابر تقسیم کرده و از نقاط به‌دست‌آمده خطوطی را عمود بر همان شعاع خارج کرده‌ایم تا قوس ربع‌دایره را در نقاط A_1 تا A_9 قطع کنند. البته گزینش عدد ۱۰ صرفاً برای درک روند کار و سهولت رسم شکل بوده است و در ادامه تعداد مستطیل‌ها را برای افزایش دقت محاسبه، به‌شدت افزایش خواهیم داد. با خارج ساختن عمودهایی موازی با شعاع افقی از نقاط A_1 تا A_9، ۹ مستطیل با عرض یکسان تشکیل می‌شوند (عمود خارج شده از نقطه دهم که در انتهای شعاع افقی ربع‌دایره واقع شده است با محیط ربع‌دایره در نقطه دیگری برخورد نمی‌کند و نتیجتاً مستطیلی نمی‌سازد). برای محاسبه مجموع مساحت نوارهای مستطیل‌شکل (S) می‌توان عرض یکی را در مجموع طول‌های همه آن‌ها ضرب کرد؛ زیرا عرض همگی برابر است. اگر برای هر مستطیل، عرض را با w و طول را با l نشان دهیم داریم:

(۲) مجموع مساحت نوارهای مستطیلی

$$S = \sum_{i=۱}^{۹} w.l_i = w\sum_{i=۱}^{۹} l_i$$

برای محاسبه طول هر یک از مستطیل‌ها می‌توان از رابطه فیثاغورس استفاده کرد. با اتصال مرکز دایره اصلی، یعنی نقطه O، به هر یک از نقاط A_1 تا A_9، مثلث‌هایی با زاویه راست حاصل می‌شوند. در تمامی این مثلث‌ها طول وتر برابر با یک واحد است؛ زیرا

وتر هر مثلث، شعاع ربع‌دایره نیز هست. بر این پایه، اگر شعاع افقی را به n بخش مساوی تقسیم کرده باشیم، در مستطیل iاُم که عرض آن برابر با $\frac{1}{n}$ واحد است، داریم:

$$l_i^2 = 1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$\rightarrow l_i = \sqrt{1 - \frac{i^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - i^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - i^2}}{n}$$

(۳) طول هر نوار مستطیلی

بنابراین مجموع مساحت مستطیل‌ها (S) برابر خواهد بود با:

$$S = w \sum_{i=1}^{n-1} l_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2 - i^2}}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - i^2}$$

(۴) مجموع مساحت مستطیل‌ها

از آن‌جا که نشان دادیم مساحت ربع‌دایره برابر با $\frac{\pi}{4}$ واحد است، اگر n را به بی‌نهایت میل دهیم و تعداد مستطیل‌ها را افزایش دهیم، به تقریب متناسبی از عدد پی دست خواهیم یافت:

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - i^2}$$

$$\rightarrow \pi = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - i^2}$$

(۵) تقریب پی

شایان ذکر است که می‌توان جمله‌ی نهایی حد مجموع بالا را به جای $n-1$، به صورت n نیز قرار داد؛ چرا که در این صورت، جمله‌ی nاُم برابر با صفر می‌شود که عضو بی‌اثر عمل جمع است.

۴- نگارش برنامه‌های رایانه‌ای برای محاسبه عدد پی با دقت دل‌خواه

اینک زمان تلفیق دقت ریاضیات با توان محاسباتی رایانه است. در زبان پُرطرف‌دار پایتون، برای محاسبه مورد نظر می‌توان کدی به این شکل نوشت:

```
n = int(input())
a = 4/(n**2)
i = 0
k = 0
c = 0
while i < n:
   b = (n**2-i**2)**0.5
   k += b
   i += 1
c = a*k
print (c)
```

هم‌چنین، استفاده از زبان برنامه‌نویسی VBA در مجموعه‌ی آفیس که در اغلب رایانه‌های خانگی در دسترس است، میسر است. با فشردن دکمه‌های Alt و F11 و یا رجوع به بخش Macros در نرم‌افزارهای مجموعه آفیس، مانند Microsoft Office Word، به این بخش هدایت می‌شویم. از قسمت Insert، یک Userform ایجاد کرده و در آن یک ورودی متن یا TextBox با نام TextBox1 و یک دکمه فرمان یا CommandButton با نام CommandButton1 قرار می‌دهیم. با دابل‌کلیک روی دکمه فرمان به قسمت کدنویسی رفته و کد زیر را که بر مبنای محاسبات قسمت پیشین نوشته شده است، وارد می‌کنیم:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
n = TextBox1.Text
a = 4 / (n ^ 2)
i = 1
1 b = (n ^ 2 - i ^ 2) ^ 0.5
```

```
k = k + b
i = i + 1
If i < n - 1 Then GoTo 1
p = a * k
MsgBox p, , "Pi is approximately equal to"
End Sub
```

با اجرای این برنامه و وارد کردن مقدار دل‌خواه n در ورودی متن و فشردن دکمه فرمان، مجموع مساحت‌های $n-1$ مستطیل، محاسبه و نمایش داده می‌شود. روشن است که با افزایش دادن n به تقریب بهتری از عدد پی دست خواهیم یافت. این تقریب همواره از عدد پی کوچک‌تر خواهد بود، زیرا مستطیل‌ها تمام سطح ربع‌دایره را پوشش نمی‌دهند؛ با وجود این می‌توان به پی نزدیک و نزدیک‌تر شد. جدول ۱ که در ادامه می‌آید، بخشی از این فرایند را به نمایش می‌گذارد. شایان ذکر است که تقریب عدد پی تا ده رقم اعشار برابر است با ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ [۶].

جدول ۱- نتایج حاصل از اجرای برنامه

ورودی برنامه	خروجی برنامه	تعداد ارقام اعشار درست
۱۰	۲/۷۳۰۱۶۲۳۶۸۵۰۶۶۹	۰
۱۰۰	۳/۱۱۴۷۷۴۳۳۷۳۸۷۱۸	۱
۱.۰۰۰	۳/۱۳۹۳۷۶۶۲۶۱۹۹۷۷	۱
۱۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۳۸۵۸۲۰۸۹۸۴۹	۳
۱۰۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۵۷۲۴۳۷۵۱۷۰۴	۴
۱.۰۰۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۵۹۰۶۴۶۷۵۷۰۸	۵
۱۰.۰۰۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۵۹۲۴۵۳۳۷۳۹	۶
۱۰۰.۰۰۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۵۹۲۶۳۳۵۸۳۲۱	۷
۱.۰۰۰.۰۰۰.۰۰۰	۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۱۵۹۲۰۹	۸

مشاهده می‌شود که با افزایش دادن ورودی برنامه می‌توان دقت محاسبه را ارتقا داده و به میزان دل‌خواه به عدد پی نزدیک شد.

۵- نتیجه‌گیری

در دهه‌های اخیر، استفاده از توانمندی‌های محاسباتی رایانه در دانش ریاضیات، در هر دو حوزه محض و کاربردی، به‌وضوح به رشد این علم، افزایش کارآمدی کاربست‌های آن در حوزه‌های گوناگون و آسان‌سازی آموزش آن منجر شده است. اثبات برخی قضایا مانند قضیه چهاررنگ، مدل‌سازی‌های پیچیده ریاضیاتی در حوزه‌های متنوعی از مهندسی و اقتصاد گرفته تا اقلیم‌شناسی و سیاست و نرم‌افزارهای گوناگون ریاضی، نمونه‌هایی از پیامدهای این تحول گسترده هستند. در این راستا، در این مقاله پس از نشان دادن رابطه‌ای حدی برای عدد پی، با استفاده از یک برنامه‌سازی رایانه‌ای ساده، به تقریب‌هایی با امکان افزایش دل‌خواه دقت دست یافتیم. این برنامه می‌تواند در آشناسازی افراد با فرایند انتگرال‌گیری نیز به کار گرفته شود.

۶- مراجع

1. Richeson, D. (2013). “Circular reasoning: who first proved that C/d is a constant?”, Cornell University: arXiv [math.HO], available at: https://arxiv.org/abs/1303.0904

2. Chong, T. T-L. (2008). “The empirical quest for π”, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 56, Issue 10, pp. 2772–2778, doi: doi.org/10.1016/j.camwa.2008.07.005

3. Niven, I. (1947). “A simple proof that π is irrational”, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 53, Number 6, p. 509.

4. Shwartz, R. K. (2015). “Pi is Transcendental: Von Lindemann’s Proof Made Accessible to Today’s Undergraduates”, Schoolcraft College, available at: https://www.researchgate.net/publication/272181195

5. Roegel, D. (2020). Lambert’s proof of the irrationality of Pi: Context and translation, France: Laboratoire lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications.

۶. ایوز، ه. و. (۱۳۹۵). *آشنایی با تاریخ ریاضیات*، ترجمه‌ی م. وحیدی اصل، جلد اوّل، چاپ سیزدهم، مرکز نشر دانشگاهی.

7. Borwein, J. M., & Macklem, M. S. (2006). “The (digital) life of Pi”, Australian Mathematical Society Gazette, Vol. 33, Number 4, pp. 243-248.

8. Arndt, J., & Haenel, C. (2001). Pi-Unleashed, (C. Lischka & D. Lischka, Trans.), New York: Springer-Verlag.

Calculating Pi with Desired Accuracy by Ordinary Computers

Mohammad Hassan Gholami

MA in Regional Studies, Shiraz University, Shiraz, Iran

gholamimohammad921@yahoo.com

Abstract

In recent decades, the use of computer power in mathematics has grown significantly. The computer-assisted proof of the four color theorem is just one example. In this paper, a short and practical method, able to be implemented using an ordinary computer, is presented for calculating the Pi number with the possibility of increasing its accuracy arbitrarily. This method is available to most people and can be applied in a short time. In addition to avoiding the use of trigonometric series and their complex calculations, it also provides the audience with a practical understanding of the integration process by proving a limit formula for approximating Pi as an irrational and transcendental number.

Keywords: pi number, computer programming, mathematical analysis, limit.

Calculer le nombre pi avec la précision souhaitée par des ordinateurs ordinaires

Muhammad Hassan Gholami

Master en études régionales, Université de Chiraz, Chiraz, Iran

gholamimohammad921@yahoo.com

Résumé

Au cours des dernières décennies, l'utilisation de la puissance des ordinateurs en mathématiques a considérablement augmenté. La preuve informatique du théorème des quatre couleurs, n'en est qu'un exemple. Dans cet article, une méthode courte et pratique, pouvant être mise en œuvre à l'aide d'un ordinateur ordinaire, est présentée pour calculer le nombre Pi avec la possibilité d'augmenter arbitrairement sa précision. Cette méthode, disponible pour la plupart des gens, peut être appliquée en peu de temps. En plus d'éviter l'utilisation de séries trigonométriques et de leurs calculs complexes, il fournit également au public une compréhension pratique du processus d'intégration en prouvant une limite pour approximer Pi comme un nombre irrationnel et transcendant.

Mots-clés: le nombre pi, programmation informatique, analyse mathématique, limite.