مجله نخبگان علوم و مهندسی

Journal of Science and Engineering Elites

جلد ۷- شماره ۲ - سال ۱۴۰۱

www.ElitesJournal.ir

تحلیل و بررسی اثر شرایط تکیه گاهی مختلف بر فرکانس های طبیعی حاصل از ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی با استفاده از تئوری ایزوژئومتریک

رضا رشمه کریم[1*]، محمد جعفری[2]، احمد عزیزی[3]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۲-دانشیار مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۳-استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان، سمنان، ایران

*rezarashmehkarim321@yahoo.com

ارسال: خرداد ماه ۱۴۰۱ پذیرش: خرداد ماه ۱۴۰۱

چکیده

در این پژوهش به تحلیل و بررسی اثر شرایط تکیه گاهی مختلف بر فرکانس های طبیعی حاصل از ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی با استفاده از روش ایزوژئومتریک پرداخته شده است. در قسمت اول این پژوهش ابتدا جهت اعتبار سنجی روش ایزوژئومتریک به مقایسه اولین فرکانس طبیعی حاصل از ارتعاش تیر در سه حالت تکیه گاهی تکیه گاه دوسر گیردار، یکسر گیردار و دو تکیه گاه ساده برای دو نسبت طول به ضخامت متفاوت پرداخته شده است. سپس در قسمت دوم این پژوهش به تاثیر شرایط مرزی و تکیه گاهی بر سه فرکانس های طبیعی اولیه تیر هدفمند در چهار حالت تکیه گاه یکسر گیردار و دوسر گیردار و تکیه گاه ساده و تکیه گاه ساده برای دو نسبت طول به ضخامت متفاوت با استفاده از روش ایزوژئومتریک پرداخته شد. نتایج حاصل از این پژوهش حاکی از آن است که روش ایزوژئومتریک از توانایی نسبتا بالایی در تحلیل ارتعاشات سازه برخوردار است. همچنین شرایط مرزی و تکیه گاهی اثر قابل توجهی بر ارتعاشات و فرکانس های طبیعی تیر موردنظر می-گذارند.

کلمات کلیدی: روش ایزوژئومتریک، تیر مدرج تابعی، فرکانس های طبیعی، بی اسپیلاین، نربز.

۱- مقدمه

بسیاری از مسائل مهندسی دارای هندسه‌هایی پیچیده هستند. از آنجایی که مدل‌سازی دقیق هندسه برای طراحی بهینه، یک پروژه زمان بر با هزینه بالاست، روش ایزوژئومتریک بر روی ایجاد پلی میان طراحی و تحلیل تمرکز دارد. در روش المان محدود، هندسه به صورت تقریبی مدل می‌شود و به دنبال آن اعمال شرایط تکیه‌گاهی به صورت دقیق قابل اعمال نمی‌باشد. با به کارگیری توابه پایه بی اسپلاین و حالت تعمیم یافته آن یعنی توابع نربز و با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌توان هندسه را به طور کاملا دقیق مدل‌سازی کرد و به جواب دقیق تر و صحیح تری رسید. روش ایزوژئومتریک یک روش عددی جدید است که در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است و پژوهش های زیادی با استفاده از این روش انجام شده است. مزیت تئوری ایزوژئومتریک نسبت به روش‌های رایج از جمله اجزای محدود، تفاضل محدود و... در مدل‌سازی دقیق هندسه های پیچیده

بدون مش و همچنین بررسی دقیق اثر شرایط مرزی و تکیه‌گاهی می‌باشد. روش ایزوژئومتریک در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش معرفی و ارائه گردید[۱]. کوترل و همکاران [۲] از آن در تحلیل ارتعاشات سازه‌ها استفاده کردند و نشان دادند استفاده از ایزوژئومتریک خطای کمتری در تخمین فرکانس‌ها دارد. بازیلو و همکاران [۳] به تحلیل ایزوژئومتریک در برخورد سازه–سیال پرداختند. حسنی و همکارانش از روش ایزوژئومتریک در بهینه سازی شکل بهره بردند[۴]. نوروززاده و همکاران [۵] در پژوهشی دیگر به تحلیل ارتعاشات نانوتیرها با استفاده از روش ایزوژئومتریک پرداختند. از دیگر پژوهش های انجام شده در زمینه روش ایزوژئومتریک می‌توان به تحلیل نانوکمان ها [۶] و نانوورق ها [۷] با استفاده از این تئوری اشاره کرد.

برای انتخاب توابع پایه برای روش ایزوژئومتریک کاندیدهای و انتخاب‌های زیادی وجود داشت که می‌توانستند استفاده شوند. توابع پایه نربز بطور گسترده در طراحی مهندسی مورد استفاده قرار گرفته شده است. مهمترین دلیل انتخاب توابع پایه نربز در روش ایزوژئومتریک، قدرت و سادگی در مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده با شرایط مرزی و تکیه گاهی پیچیده به طور دقیق می‌باشد. همانطور که مشخص شده است، توابع پایه نربز از توابع درونیاب هرمیت و لاگرانژ که به طور گسترده در فرمول‌بندی المان محدود استفاده می‌شود پیوستگی بالاتری دارد و علاوه بر آن مرتبه توابع پایه نربز به سادگی و بدون تغییر در هندسه یا پارامترهای آن می‌تواند افزایش پیدا کند. همین امر موجب می‌شود که تمامی مقاطع مخروطی از جمله دایره‌ها، استوانه‌ها، کره‌ها، بیضی‌ها و... به راحتی با استفاده از روش ایزوژئومتریک مدل‌سازی شوند. در این پژوهش پس از معرفی توابع پایه بی اسپیلاین، نربز، بردارهای گرهی و معرفی مواد هدفمند، به مدل‌سازی یک تیر به کمک همین توابع پایه پرداخته شده است. با ارائه و محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم مربوط به تیر ساخته شده از مواد هدفمند در روش ایزوژئومتریک، در حالت تنش صفحه‌ای، به بررسی اثر شرایط تکیه گاهی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی حاصل از ارتعاشات یک تیر از جنس مواد مدرج تابعی (مواد هدفمند) پرداخته شده است. همچنین در این پژوهش تاثیر نسبت طول به ضخامت تیر موردنظر بر فرکانس‌های طبیعی حاصل از ارتعاش تیر موردنظر مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۲– توابع پایه بی اسپیلاین و نربز

یکی از بزرگترین نقاط قوت توابع نربز سادگی در مدل‌سازی سطوح پیچیده می‌باشد. این توابع می‌توانند تمامی مقاطع مخروطی از جمله دایره‌ها، استوانه‌ها، کره‌ها، بیضی‌ها را مدل‌سازی کنند. توابع نربز از توابع پایه بی اسپیلاین ساخته شده‌اند. برای تولید بی اسپیلاین‌ها به نقاط کنترلی، بردارهای گرهی و درجه چندجملهای توابع نیاز است. بردارهای گرهی در فضای پارامتری در مختصات یک بعدی غیرنزولی به صورت $E=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,.\xi_{n+p+1}\}$ نمایش داده می‌شوند که ξ_i j امین گره می‌باشد و n و p به ترتیب بیانگر درجه چندجمله‌ای و تعداد توابع پایه برای تولید منحنی بی اسپیلاین می‌باشند. در صورتی که فاصله بین نقاط برابر باشد، بردار گرهی یکنواخت و در غیر اینصورت غیر یکنواخت است. مقادیر گرهی می‌توانند تکرار شوند(بیش از یک گره دارای مقادیر یکسان باشند) تکرار مقادیر گرهی مفهوم مهمی در خصوصیات توابع پایه دارد. به بردار گرهی‌ای که نقاط ابتدا و انتهای آن به تعداد p+1 بار تکرار شود، بردار گرهی باز می‌گویند. تابع پایه بی‌اسپیلاین i ام از مرتبه p را با $N_{i,p}$ نشان می دهند که روابط حاکم بر آن به صورت زیر تعریف می‌شود[۲]:

$$\begin{aligned}
&for\ \ p=0\ ,\ \xi_i\le\xi\le\xi_{i+1}\quad\Rightarrow\quad N_{i,0}(\xi)=1\\
&for\ \ p=0\ ,\ otherwise\quad\Rightarrow\quad N_{i,0}(\xi)=0\\
&for\ \ p=1.2.3.\quad N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}+\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi)
\end{aligned}\tag{۱}$$

با توجه به نقاط کنترلی B_i، خم بی اسپیلاین از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) B_i \qquad i = 1.2.3..n \tag{۲}$$

برای بدست آوردن سطح بی اسپیلاین باید بردارهای گرهی در دو راستا تعریف شوند که به دنبال آن در دو راستا تابع پایه ایجاد می‌شوند. رابطه سطوح بی‌اسپیلاین بصورت زیر تعریف می‌شود[۲]:

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\xi) B_{i,j} \qquad i = 1.2.3..n \quad . \quad j = 1.2.3..m \tag{۳}$$

تمایز توابع نربز و توابع پایه بی‌اسپیلاین در این است که توابع پایه نربز برای نقاط کنترلی ورن در نظر می‌گیرند. همین امر موجب می‌شود که مقاطع مخروطی به راحتی مدل شوند. توابع پایه نربز مربوط به خم‌ها و رابطه منحنی نربز، به ترتیب در روابط (۴) و (۵) آورده شده است.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) W_i}{W(\xi)} \quad . \quad W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) W_i \tag{۴}$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_{i,p}(\xi) B_i \tag{۵}$$

توابع پایه نربز برای سطوح نیز در رابطه (۶) بیان شده است.

$$R_{i,j}^{p.q}(\xi.\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\xi) W_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\xi) W_{i,j}} \tag{۶}$$

قابل توجه است که اگر تمامی وزن ها یکی باشند در این صورت رابطه $R_{i,p}(\xi) = N_{i,p}(\xi)$ برقرار است. بنابراین می‌توان بی-اسپیلاین‌ها را حالت خاصی از نربزها در نظر گرفت.

۳– مواد مدرج تابعی

تئوری اولیه تولید مواد مدرج تابعی (مواد هدفمند) در کشور ژاپن در سال ۱۹۸۴ میلادی پیشنهاد شد. با در نظر گرفتن یک تیر با ضخامت h و قرارگیری مبدا مختصات در وسط آن و نسبت حجمی V_c و V_m که به ترتیب برای سرامیک و فلز می‌باشند، قانون توانی به شکل معادلات زیر بیان می‌شود[۲]:

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^k \quad . \quad V_m = 1 - V_c \tag{۷}$$

در رابطه فوق، k ثابت قانون توانی می‌باشد و مقدار آن همواره بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد. با در نظر گرفتن مقدار واحد برای ثابت قانون توانی، ترکیب فلز و سرامیک خطی می‌شود و همچنین اگر این مقدار را صفر در نظر بگیریم تیر موردنظر تبدیل به تیری همگن و از جنس سرامیک می‌شود. با فرض اینکه $P(z)$ یکی از خصوصیات ماده هدفمند مانند مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و یا چگالی باشد، برای تخمین آن با توجه به مدل ردی از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c = P_m + (P_c - P_m) V_c \tag{۸}$$

۴– روابط حاکم بر تئوری ایزوژئومتریک

ماتریس R، ماتریس P، و ماتریس d به ترتیب ماتریس شکل، ماتریس نقاط کنترلی و ماتریس جابجایی نامیده شده و به شکل زیر تعریف می‌شوند[۸]:

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 & \dots & R_{nm} & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & R_2 & \dots & 0 & R_{nm} \end{bmatrix} \\ P &= \left[P_1^x . P_1^y . P_2^x . P_2^y ..... P_{nm}^x . P_{nm}^y\right]^T \\ d &= \left[d_1 . d_2 . d_3 . d_4 ..... d_{2(mn)-1} . d_{2(mn)}\right]^T \end{aligned} \tag{۹}$$

مختصات درون المانی و جابجایی درون المانی با توجه به تعریف ماتریس های بالا به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$x(\xi.\eta) = RP \tag{۱۰}$$

$$u(\xi.\eta) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = Rd \tag{۱۱}$$

$$d = \left[d_1 \,.\, d_2 \,.\, d_3 \,.\, d_4 \ldots\ldots d_{2(mn)-1} \,.\, d_{2(mn)}\right]^T \tag{۱۲}$$

$$u = R_1 d_1 + R_2 d_3 + \cdots + R_{2(mn)-1} d_{2(mn)} \tag{۱۳}$$

$$v = R_1 d_2 + R_2 d_4 + \cdots + R_{(mn)-1} d_{2(mn)} \tag{۱۴}$$

با توجه به روابط کرنش-جابجایی، ماتریس کرنش بر حسب بردارهای جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

با توجه به قانون هوک داریم:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

ماتریس کرنش بر اساس توابع شکل به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{bmatrix} d = Bd \tag{۱۷}$$

$$B = L(R) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

با توجه به انرژی کرنشی جسم ماتریس سختی المان به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$K = \int B^T D B \det J \, d\xi \, d\eta \tag{۱۹}$$

همچنین با توجه به انرژی جنبشی جسم ماتریس جرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \int R^T \rho R \det J \, d\xi \, d\eta \tag{۲۰}$$

در روابط فوق، ρ چگالی ماده و D در مواد هدفمند ماتریس متغیری برای مشخصات ماده می‌باشند، که در حالت تنش صفحه‌ای با توجه به رابطه (۱۶) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_E = \frac{E(y)}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-v \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

در روابط فوق ρ و E از مشخصات ماده می‌باشند که از رابطه (۸) محاسبه می‌شوند با این تفاوت که در پژوهش حاضر مبدا مختصات در سطح پایینی تیر در نظر گرفته شده است و مختصه z جای خود را به مختصه y می دهد و با فرضیات در نظر گرفته شده در این پژوهش رابطه (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$P(y) = P_m + (P_c - P_m)\left(\frac{y}{h}\right)^k \tag{۲۲}$$

فرکانس طبیعی تیر با فرض یک حرکت هارمونیک، با حل مسئله مقدار ویژه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(K - \Lambda M)\varphi = 0 \quad . \quad \Lambda = \omega^2 \quad . \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{۲۳}$$

در رابطه اخیر، φ، مود ارتعاشی می‌باشد. در پژوهش حاضر فرکانس‌های اولیه به کمک رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{۲۴}$$

۵- مثال‌های عددی

در این قسمت ابتدا جهت اعتبارسنجی کد نوشته در نرم افزار به بدست آوردن فرکانس اولیه یک تیر هدفمند که سطح بالایی آن از آلومینای خالص و سطح پایینی آن از آلومینیوم خالص می‌باشد و مشخصات ماده در راستای ضخامت تیر طبق قانون توانی تغییر پیدا می‌کند. خواص آلومینا و آلومینیوم در نظر گرفته شده در جدول (۱) بیان شده است[۹]. لازم به ذکر است در این قسمت فرکانس اولیه تیر برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی در سه حالت که حالت اول تیر یکسر گیردار و حالت دوم تیر دو سر گیر دار و حالت سوم تیر با تکیه گاه ساده می‌باشد، بدست خواهد آمد و نتایج حاصل با نتایج حاصل در مرجع [۱۶] مقایسه خواهد شد. نتایج حاصل از فرکانس های اولیه تیر موردنظر در حالت دوسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۲) و (۳) بیان شده است. در ادامه نتایج حاصل از فرکانس های اولیه تیر موردنظر در حالت یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۴) و (۵) آورده شده است. همچنین نتایج حاصل از فرکانس های اولیه تیر موردنظر در حالت تیر با دو تکیه-گاه ساده با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۶) و (۷) بیان شده است.

جدول ۱- مشخصات ترکیب ماده هدفمند [۹]

مشخصات ماده	آلومینا	آلومینیوم
E	$380Gpa$	$70Gpa$
ρ	$3960Kg/m^{-3}$	$2702Kg/m^{-3}$
v	0.3	0.3

جدول ۲- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی دوسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵

تئوری	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
تیموشنکو [۹]	۱۰.۰۳	۸.۷۰	۷.۹۲	۶.۶۶	۶.۳۴
پژوهش حاضر	۱۰.۱۴	۸.۹۳	۸.۰۵	۶.۵۷	۶.۲۳
درصد تفاوت	۱.۰۹	۲.۲۹	۱.۶۴	۱.۳۵	۱.۷۳

جدول ۳- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی دوسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۲۰

تئوری	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
تیموشنکو [۹]	۱۲.۲۲	۱۰.۴۲	۹.۴۳	۸.۱۶	۷.۹۱
پژوهش حاضر	۱۲.۲۱	۱۰.۵۱	۹.۴۱	۸.۰۵	۷.۶
درصد تفاوت	۰.۰۸۱	۰.۸۶	۰.۲۱	۱.۳۴	۳.۹۱

جدول ۴- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵

تئوری	$K = 0$	$K = 0.5$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 10$
تیموشنکو [۹]	۱.۸۹	۱.۶۲	۱.۴۶	۱.۲۶	۱.۲۲
پژوهش حاضر	۱.۹۱	۱.۷۲	۱.۵۳	۱.۳۲	۱.۱۹
درصد تفاوت	۱.۰۵	۶.۱۷	۴.۷۸	۴.۷۶	۲.۴۵

جدول ۵- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۲۰

تئوری	$K = 0$	$K = 0.5$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 10$
تیموشنکو [۹]	۱.۹۵	۱.۶۶	۱.۵۰۱	۱.۳۰۳	۱.۲۶
پژوهش حاضر	۲	۱.۷۲	۱.۵۱	۱.۳	۱.۲۳
درصد تفاوت	۲.۵۶	۳.۶۱	۰.۵۹	۰.۲۳	۲.۳۸

جدول ۶- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی ساده با نسبت طول به ضخامت ۵

تئوری	$K = 0$	$K = 0.5$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 10$
تیموشنکو [۹]	۵.۱۵	۴.۴۰	۳.۹۹	۳.۴۳	۳.۳۱
پژوهش حاضر	۴.۹۵	۴.۲۴	۳.۷۵	۳.۳۱	۳.۲
درصد تفاوت	۳.۸۳	۳.۶۳	۶.۰۱	۳.۴۹	۳.۳۲

جدول ۷- اعتبارسنجی فرکانس های اولی بی بعد در حالت تکیه‌گاهی ساده با نسبت طول به ضخامت ۲۰

تئوری	$K = 0$	$K = 0.5$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 10$
تیموشنکو [۹]	۵.۴۶	۴.۶۵	۴.۲۰	۳.۶۵	۳.۵۴
پژوهش حاضر	۵.۴۱	۴.۶۱	۴.۱۹	۳.۶۱	۳.۴۴
درصد تفاوت	۰.۹۱	۰.۸۶	۰.۲۳	۱.۰۹	۲.۸۲

همانطور که در جدول‌های (۲) تا (۷) مشاهده می‌شود، در هر سه حالت تکیه گاهی با ثابت‌های قانون توانی مختلف روش و با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ در فرکانس های بی بعد بدست آمده با استفاده از روش ایزوژئومتریک از دقت مناسبی برخوردار بوده و نتایج بدست آمده تطابق نسبتا خوبی با نتایج حاصل در مرجع [۹] دارد.

ماده در نظر گرفته شده برای تیر هدفمند در ادامه پژوهش حاضر طبق ماده انتخابی مرجع [۱۰] می‌باشد که خواص مکانیکی آن در جدول (۸) بیام شده است. در این مرجع چگالی در کل تیر، ثابت در نظر گرفته شده است. در ادامه در این پژوهش به بررسی اثر شرایط تکیه گاهی بر سه فرکانس طبیعی اول تیر هدفمند درچهار حالت که حالت اول تیر دو سر آزاد حالت دوم تیر یکسر گیردار و حالت سوم تیر دو سر گیردار و حالت چهارم تیر با دو تکیه گاه ساده می‌باشد. همچنین در این قسمت نتایج برای دو نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ بدست و با هم مقایسه خواهد شد. لازم به ذکر است که فرکانس های طبیعی تیر موردنظر در این قسمت طبق رابطه (۲۴) بدست خواهد آمد.نتایج حاصل از سه فرکانس طبیعی اولیه تیر موردنظر در حالت دوسر آزاد با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۹) و (۱۰) بیان شده است. در ادامه نتایج حاصل از سه فرکانس طبیعی اولیه تیر موردنظر در حالت یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۱۱) و (۱۲) آورده شده است. همچنین نتایج حاصل از سه فرکانس طبیعی اولیه تیر موردنظر در حالت تیر با دو تکیه‌گاه دو سر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۱۳) و (۱۴) بیان شده است. درنهایت نتایج حاصل از سه فرکانس طبیعی اولیه تیر موردنظر در حالت تیر با دو تکیه‌گاه ساده با نسبت طول به ضخامت ۵ و ۲۰ به ترتیب در جدول (۱۵) و (۱۶) بیان شده است.

جدول ۸- مشخصات ترکیب ماده هدفمند در پژوهش حاضر [۱۰]

مشخصات ماده	آلومینا	آلومینیوم
E	$380Gpa$	$70Gpa$
v	0.3	0.3

جدول ۹- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی دوسر آزاد با نسبت طول به ضخامت ۵

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۱۴.۵۷	۱۱.۸۱	۱۰.۲۱	۸.۱۳	۷.۵
دوم	۳۳.۳۹	۲۷.۲۳	۲۳.۷۹	۱۸.۲۹	۱۷
سوم	۳۸.۳۵	۳۲.۷۸	۳۰.۱	۲۱.۷	۱۹.۳۲

جدول ۱۰- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی دوسر آزاد با نسبت طول به ضخامت ۲۰

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۱۶.۳۵	۱۳.۲۶	۱۱.۵	۹.۲۶	۸.۷
دوم	۴۳.۸	۳۵.۷	۳۱	۲۴.۸	۲۳
سوم	۸۲.۱	۶۶.۹	۵۸	۴۶.۱	۴۲.۹

جدول ۱۱- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۲.۳۹	۱.۹۹	۱.۶۸	۱.۳۹	۱.۳
دوم	۱۳.۱	۱۰.۵	۹.۱۲	۷.۱۲	۶.۶
سوم	۱۸.۳۹	۶۶.۹	۱۴.۲۱	۱۰.۵۳	۹.۳۲

جدول ۱۲- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی یکسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۲۰

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۲.۴۲	۲.۳	۱.۸	۱.۴	۱.۳
دوم	۱۵	۱۲.۶	۱۱.۲	۸.۵۳	۸
سوم	۴۱.۵	۳۳.۹	۳۰.۴	۲۳.۷	۲۲.۴

جدول ۱۳- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی دوسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۵

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۱۲.۱	۹.۹۸	۸.۷۵	۶.۶۷	۶.۲۰
دوم	۲۹	۲۳.۷۶	۲۰.۵۵	۱۵.۳۴	۱۴.۱۸
سوم	۳۵.۸۹	۳۰.۱۲	۲۷	۱۹.۷۷	۱۷.۶۸

جدول ۱۴- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی دوسر گیردار با نسبت طول به ضخامت ۲۰

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۱۵.۳۸	۱۲.۶۲	۱۱.۱	۸.۷	۸
دوم	۴۱.۶	۳۴.۱	۲۹.۹	۲۳.۴۹	۲۱.۶۴
سوم	۸۰	۶۶.۲۴	۵۸.۲	۴۵.۳۶	۴۱.۷۵

جدول ۱۵- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی با دو تکیه گاه ساد با نسبت طول به ضخامت ۵

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۷.۲۳	۶.۵۶	۶.۲۳	۵.۹	۵.۳۲
دوم	۱۰.۰۱	۹.۴۵	۸.۴۵	۷.۸۷	۷.۶۵
سوم	۲۱.۹۲	۱۸.۷	۱۶.۵۴	۱۵.۷۳	۱۴.۹۳

جدول ۱۶- سه فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده در حالت تکیه‌گاهی با دو تکیه گاه ساد با نسبت طول به ضخامت ۲۰

شماره فرکانس	$K=0$	$K=0.5$	$K=1$	$K=5$	$K=10$
اول	۸.۰۱	۷.۹۱	۷.۵	۷.۲۳	۷.۰۶
دوم	۱۷.۲۳	۱۳.۴۶	۱۵.۲۳	۲۴.۵۱	۲۲.۲
سوم	۲۹.۷۶	۳۸.۸۹	۳۳.۴۷	۵۱.۶۹	۴۵.۲۲

۹- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به تحلیل و بررسی اثر شرایط تکیه گاهی مختلف بر فرکانس های طبیعی حاصل از ارتعاشات یک تیر مدرج تابعی با استفاده از روش ایزوژئومتریک پرداخته شده است. در قسمت اول این پژوهش ابتدا جهت اعتبار سنجی روش ایزوژئومتریک به مقایسه اولین فرکانس طبیعی حاصل از ارتعاش تیر در سه حالت تکیه گاهی تکیه گاه دوسر گیردار، یکسر گیردار و دو تکیه گاه ساده برای دو نسبت طول به ضخامت متفاوت پرداخته شده است. سپس در قسمت دوم این پژوهش به تاثیر شرایط مرزی و تکیه گاهی بر سه فرکانس های طبیعی اولیه تیر هدفمند در چهار حالت تکیه گاه یکسر گیردار و دوسر گیردار و تکیه گاه ساده و تکیه گاه ساده برای دو نسبت طول به ضخامت متفاوت با استفاده از روش ایزوژئومتریک پرداخته شد. نتایج حاصل از این پژوهش حاکی از آن است که روش ایزوژئومتریک از توانایی نسبتا بالایی در تحلیل ارتعاشات سازه برخوردار است. همچنین شرایط مرزی و تکیه گاهی اثر قابل توجهی بر ارتعاشات و فرکانس های طبیعی تیر موردنظر می‌گذارند. همچنین با توجه به نتایج حاصل از این پژوهش می‌توان بیان کرد که با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر مقدار فرکانس طبیعی اولیه بی بعد شده افزایش پیدا کرد و از بین شرایط تکیه گاهی مورد مطالعه در این پژوهش در وضعیت تکیه گاهی دو سر گیردار، فرکانس های طبیعی نسبت به افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، حساسیت بیشتری نشان دادند. همچنین در تمامی شرایط با افزایش مقادیر ثابت قانون توانی، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد شده کاهش پیدا کرد

۱۰- مراجع

1. Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y., & Hughes, T. J. (2006). Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. Computational Mechanics, 38(4), 310-322.

2. Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y., & Hughes, T. J. (2006). Isogeometric analysis of structural vibrations. Computer methods in applied mechanics and engineering, 195(41-43), 5257-5296.

3. Bazilevs, Y., Calo, V. M., Hughes, T. J., & Zhang, Y. (2008). Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. Computational mechanics, 43(1), 3-37.

4. Hassani, B., Tavakkoli, S. M., & Moghadam, N. Z. (2011). Application of isogeometric analysis in structural shape optimization. Scientia Iranica, 18(4), 846-852.

5. Norouzzadeh, A., Ansari, R., & Rouhi, H. (2017). Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of nonlocal elasticity: an isogeometric approach. Applied Physics A, 123(5), 330.

6. Malagu, M., Benvenuti, E., Simone, A., & Tralli, A. M. (2012). A strain gradient approach to the analysis of nanoarches: Formulation and numerical solution with NURBS interpolation.

7. P. Phung-van, M. Abdel-wahab, K. M. Liew, S. Bordas, H. Nguyen-xuan, Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory, Composite structures, Vol. 123, pp. 137-149, 2015.

8. S. Shojaee, S. Rostami and A. Moeinadini, "Isogeometric analysis of plain stress/strain problems based on FEM method", Shahid Bahonar University of Kerman. (in Persian فارسی)

9. M. Şimşek, "Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories", Nuclear Engineering and Design, Vol. 240, No. 4, pp. 697-705, (2010).

10. M. Aydogdu, V. Taskin, "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges", Materials & design, Vol. 28, No. 5, pp. 1651-1656, (2007).