مجله نخبگان علوم و مهندسی

Journal of Science and Engineering Elites

جلد ۷- شماره ۱- سال ۱۴۰۱

www.ElitesJournal.ir

ارائه و اثبات روشی برای نمایش معکوس اعداد حقیقی روی محور اعداد با ابزارهای اقلیدسی

محمد حسن غلامی

کارشناس ارشد مطالعات منطقه ای، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

gholamimohammad921@yahoo.com

ارسال: اسفند ماه ۱۴۰۰ پذیرش: فروردین ماه ۱۴۰۱

چکیده

در هندسه اقلیدسی، بررسی امکان‌پذیر بودن ترسیمات هندسی تنها با استفاده از ستاره (خط‌کش غیر مدرّج) و پرگار از دیرباز مورد بحث و کنکاش بوده است. ثابت شده است که حل برخی مسائل کلاسیک این شاخه از دانش ریاضیات تنها با کاربرد دو ابزار یادشده در حالت کلی ناممکن است؛ گرچه ممکن است مسائل مزبور در موارد خاصی حل‌پذیر باشند. تثلیث زاویه (تقسیم زاویه‌ی دل‌خواه به سه زاویه‌ی برابر)، تضعیف مکعب (ترسیم مکعبی با حجم دو برابر مکعب داده شده) و تربیع دایره (رسم مربعی با مساحت برابر با دایره‌ی مفروض) از این دست مسائل هستند که برای سده‌های پیاپی ریاضی‌دانان تازه‌کار و حرفه‌ای را به چالش می‌کشیدند. با این حال، بسیاری ترسیمات هندسی نیز با خط‌کش و پرگار قابل انجام‌اند؛ نمایش موقعیت برخی اعداد گنگ بر روی محور اعداد چنین هستند. با روش‌های ساده‌ای می‌توان $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و به طور عمومی ریشه‌ی هر عدد طبیعی را روی محور اعداد نشان داد. در این مقاله روشی برای نمایش معکوس هر عدد حقیقی، اعم از گویا و گنگ، که موقعیت آن بر روی محور اعداد داده شده باشد، ارائه و اثبات می‌شود و نتایج جبری حاصل از آن نیز تبیین می‌گردد.

کلمات کلیدی: ترسیم هندسی، ستاره و پرگار، محور اعداد، معکوس اعداد حقیقی، ابزارهای اقلیدسی.

۱– مقدمه

در هندسه مسطحه، اثبات ممکن بودن ترسیمات هندسی تنها با به‌کارگیری دو ابزار خط‌کش غیر مدرّج و پرگار از مسائل دیرینه بوده است. برخی ترسیمات کلاسیک هندسی در حالت کلی و فقط با کاربرد دو ابزار یادشده ناممکن است؛ تقسیم زاویه‌ای داده شده به سه زاویه‌ی برابر، ترسیم مکعبی با گنجایش دو برابر مکعب مفروض و رسم مربعی با مساحت برابر با دایره‌ای دل‌خواه مشهورترین این دست ترسیمات هستند که از زمان یونان باستان مورد توجه و مطالعات فراگیر و متعدد بوده‌اند. این مقاله با افراز مجموعه‌ی اعداد حقیقی به زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی نامنفی و اعداد حقیقی منفی، روش نمایش معکوس اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها را در دو بازه‌ی مختلف ارائه و اثبات می‌نماید. تعیین بازه‌ی مشتمل بر وارون هر عدد با توجه به بازه قرارگیری خود آن عدد، از نتایج جبری روش بیان شده در این مقاله می‌باشد.

۲- پیشینه پژوهش

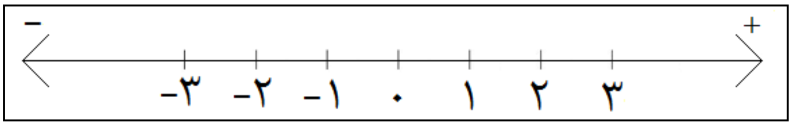
در زمینه امکان‌پذیری و شیوه انجام ترسیمات هندسی، از دیرباز مطالعات بسیاری صورت پذیرفته و کتاب‌ها و مقالات متعددی نوشته شده‌اند که در این جا به چند مورد اشاره می‌شود. هاوارد ویتلی ایوز در فصل چهارم جلد نخست کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات، به تفصیل تاریخچه‌ی چالش ریاضی‌دانان را در راه تلاش برای حل مسائل تضعیف، تثلیث و تربیع با استفاده از ابزارهای اقلیدسی شرح داده است و به حل‌ناپذیر بودن این سه مورد، که از زمان یونان باستان مورد توجه بوده‌اند، اشاره کرده است [۱]. کتسبرگ در مقاله‌ای با عنوان «ریشه‌های ریاضیاتی: ابزارهای اقلیدسی و آفرینش هندسه‌ی اقلیدسی»، به شرح تاریخ شکل‌گیری هندسه اقلیدسی، کارکرد ابزارهای اقلیدسی و مشابهت ابزارهای امروزین مورد استفاده در ترسیمات هندسی با تعاریف تاریخی آن‌ها پرداخته است [۲]. دیوید سی. رویستر در فصل سوم تقریرات درس هندسه نااقلیدسی خود، با عنوان «ساخت‌های اقلیدسی»، نمونه‌هایی از ترسیم‌پذیری‌های اقلیدسی را ثابت کرده است [۳]. در مقاله‌ی حاضر، به نوع دیگری از ترسیم که بر محور اعداد حقیقی صورت می‌پذیرد، پرداخته و استنتاجات جبری حاصل از آن را نیز بیان می‌کنیم.

۳- نمایش معکوس اعداد نامنفی

از میان اعداد نامنفی، برای عدد صفر، وارون تعریف نمی‌شود. معکوس عدد یک نیز برابر با خود آن است و نمایش آن نیازی به کاری بیش‌تر ندارد. بنابراین در این بخش ابتدا روش نمایش معکوس اعداد بین صفر و یک و سپس شیوه‌ی مکان‌یابی وارون اعداد بزرگ‌تر از یک را بررسی می‌نماییم.

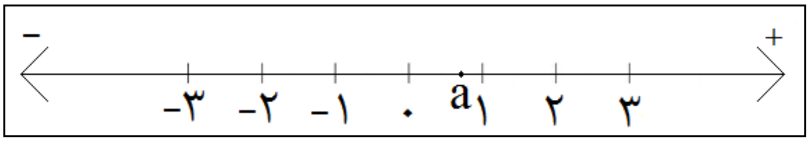
۳-۱- نمایش معکوس اعداد بین صفر و یک

محور اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱).



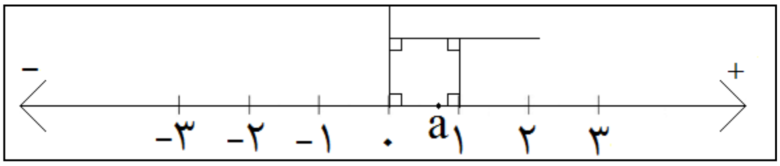
شکل ۱- محور اعداد حقیقی

فرض می‌کنیم مکان عدد دل‌خواه a میان ۰ و ۱ داده شده است (شکل ۲).



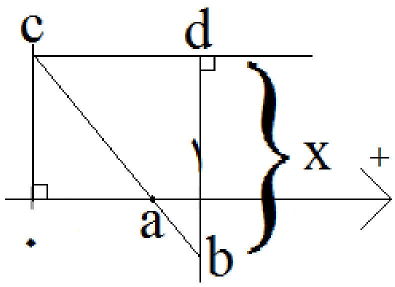
شکل ۲- مکان عدد دل‌خواه ۰<a<۱

می‌خواهیم مکان عدد $\frac{1}{a}$ را بیابیم. توجه داریم که تفاوتی ندارد عدد a گویا باشد یا گنگ. ثابت می‌شود که در صفحه هندسه مسطحه، می‌توان تنها با ستاره یا خط‌کش نامدرّج، و پرگار، عمودی بر یک خط که از یک نقطه‌ی واقع بر آن خط بگذرد رسم کرد [۴]. چنان که ترسیم خط عمود بر خط دل‌خواه که از نقطه‌ای خارج از آن خط بگذرد هم ممکن است [۵]. این کار در واقع می‌تواند به صورت ترسیم عمود منصف زاویه نیم‌صفحه یا ۱۸۰ درجه در نظر گرفته شود. با روش یاد شده خطی عمود بر محور اعداد که از نقطه‌ی مبدأ محور یا مکان عدد صفر بگذرد ترسیم می‌کنیم. با پرگار یک واحد با شروع از صفر روی خط ترسیم‌شده جدا می‌کنیم. از نقطه‌ی به دست‌آمده عمودی بر همان خط رسم و یک واحد روی آن جدا می‌کنیم. نقطه حاصل شده را به مکان عدد ۱ روی محور اعداد متصل می‌کنیم. این پاره‌خط عمود بر محور اعداد است. اینک در حقیقت مربعی به ضلع یک واحد ساخته‌ایم که پاره‌خط با رئوس اعداد صفر و ۱ یکی از اضلاع آن است (شکل ۳).



شکل ۳- مربع به ضلع واحد بر محور اعداد حقیقی

حال از رأس بالایی قطر اصلی مربع (نقطه c در شکل ۴)، خطی به نقطه‌ی a متصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع مربع را که عمود بر عدد ۱ است در نقطه‌ی b قطع کند (شکل ۴). حال اثبات می‌کنیم فاصله b تا خط موازی با محور اعداد، که آن را با x نشان داده‌ایم، همان مطلوب مسأله یعنی مقدار $\frac{۱}{a}$ است.



شکل ۴- خط گذرا بر رأس بالایی قطر اصلی مربع و نقطه‌ی a

بر پایه‌ی قضیه تالس در مثلثی با رئوس c، d و b به دلیل توازی اضلاع مربع داریم:

$$\frac{x - ۱}{x} = \frac{۱ - a}{۱}$$

با ضرب طرفین و وسطین داریم:

$$x - ۱ = x - ax$$

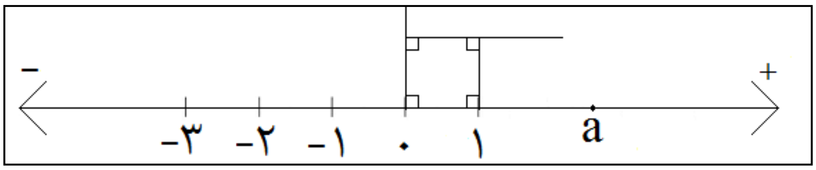
$$\rightarrow ۱ = ax$$

$$\rightarrow x = \frac{۱}{a}$$

اثبات تمام است. حال با باز کردن دهانه پرگار به اندازه‌ی x می‌توانیم جایگاه دقیق $\frac{۱}{a}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهیم.

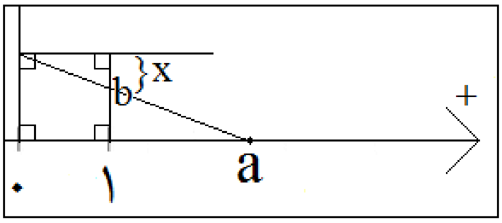
۳-۲- نمایش معکوس اعداد بزرگ‌تر از یک

با این فرض که عدد دل‌خواه a بزرگ‌تر از ۱ داده شده است، مربعی به شرح یادشده در بخش قبل رسم کرده‌ایم (شکل ۵). شایان توجه است که میزان فاصله نقطه‌ی a از ۱ مهم نیست؛ لذا در شکل ۵ نقاط مربوط به سایر اعداد مثبت نمایش داده نشده‌اند.



شکل ۵- مکان عدد دل‌خواه a>۱ و مربع به ضلع واحد

در این مرحله از رأس بالایی قطر اصلی مربع، خطی به نقطه a متصل می‌کنیم تا آن ضلع مربع را که عمود بر عدد ۱ است در نقطه b قطع کند (شکل ۶). حال اثبات می‌کنیم فاصله b تا خط موازی با محور اعداد، که آن را با x نشان داده‌ایم، همان مطلوب مسأله یعنی مقدار $\frac{۱}{a}$ است.



شکل۶ – خط گذرا بر رأس بالایی قطر اصلی مربع و نقطه‌ی a

دو مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده در شکل متشابه‌اند. زیرا زوایای آن دو یک‌به‌یک برابر هستند. در واقع، این دو مثلث در رأس b دارای زوایای متقابل به رأس و مساوی‌اند. بر اساس قضایای تشابه داریم:

$$\frac{x}{۱-x} = \frac{۱}{a-۱}$$

بر پایه خواص تناسب و با ضرب طرفین و وسطین داریم:

$$ax - x = ۱ - x$$

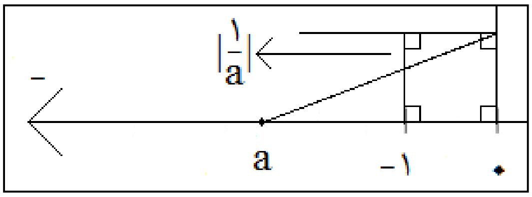
$$\rightarrow ax = ۱$$

$$\rightarrow x = \frac{۱}{a}$$

اثبات کامل است. با گشودن دهانه پرگار به اندازه‌ی x می‌توانیم جایگاه دقیق $\frac{۱}{a}$ را روی محور نشان دهیم.

۴– نمایش معکوس اعداد منفی

برای نمایش وارون اعداد منفی کافی است وارون قرینه آن‌ها را که عددی مثبت است به دست آورد و با باز کردن دهانه پرگار به اندازه آن و قرار دادن نوک پرگار بر روی مبدأ محور، آن اندازه را در جهت منفی محور نمایش داد. افزون بر این روش، می‌توان مربعی را با ضلع پاره‌خطی با رئوس صفر و ۱– ترسیم کرد و سایر مراحل را مانند اعداد مثبت انجام داد. برای نمونه، شکل ۷ حصول اندازه وارون عددی منفی و کوچک‌تر از ۱– را نشان می‌دهد. البته باید توجه داشت که چون وارون a، مثل خود a، عددی است منفی، اندازه پاره‌خط به دست آمده در واقع قدر مطلق $\frac{۱}{a}$ است که می‌توان با انتقال آن به قسمت منفی محور، محل $\frac{۱}{a}$ را نشان داد. برای اعداد میان صفر و ۱– هم می‌توان دقیقاً مشابه با روش ذکر شده در بخش ۲–۱ عمل کرد.



شکل ۷– مکان عدد دل‌خواه a<۰، مربع به ضلع واحد و خط گذرا بر رأس بالایی قطر فرعی مربع و نقطه a

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ثابت کردیم که با در اختیار داشتن مکان یک عدد بر روی محور اعداد حقیقی، فارغ از این که آن عدد مثبت یا منفی و گویا یا گنگ باشد، می‌توان محل قرارگیری وارون آن را روی محور اعداد تنها با استفاده از ابزارهای اقلیدسی یعنی پرگار و ستاره یا خط‌کش نامدرّج نشان داد. هم‌چنین، جدا از اثبات‌های جبری، با استفاده از ترسیمات هندسی انجام شده می‌توان به‌وضوح نشان داد که وارون اعداد میان صفر و ۱، بزرگ‌تر از ۱ و وارون اعداد بزرگ‌تر از ۱، کوچک‌تر از ۱ هستند. به همین ترتیب، وارون اعداد میان صفر و ۱-، کوچک‌تر از ۱- و معکوس اعداد کوچک‌تر از ۱-، بزرگ‌تر از ۱- می‌باشند.

۶- مراجع

۱- ایوز، ه. و. (۱۳۹۵). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه‌ی م. وحیدی اصل، جلد اوّل، چاپ سیزدهم، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۵.

2- Kastberg, S. E. (2002). “Mathematical Roots: Euclidean Tools and the Creation of Euclidean Geometry”, in Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 7, Issue 5, (2002) 294–296, doi: doi.org/10.5951/mtms.7.5.0294

3- Royster, D. C. (2002). Non-Euclidean Geometry, University of Kentucky, Retrieved from https://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/spring02/

4- Raghavan, K. N. (2013). Constructions with ruler and compass; An application of algebra to geometry, Retrieved from https://www.imsc.res.in/~knr/130729cmi

5- Ben-Ari, M. (2019). Surprising Constructions with Straightedge and Compass, Version 1.0.0.

Providing and Proving a Method for the Representation of the Inverse of Real Numbers on the Number Line Using Euclidean Tools

Mohammad Hassan Gholami

MA in Regional Studies, Shiraz University, Shiraz, Iran

gholamimohammad921@yahoo.com

Abstract

In Euclidean geometry, the study of the feasibility of geometric drawings using only straightedge and compass has long been debated. It has been proved that it is impossible to solve some classical problems of this branch of mathematics by using only the two mentioned tools in general; however, these issues may be soluble in certain cases. Angle trisection (dividing an arbitrary angle into three equal angles), doubling the cube (drawing a cube with twice the volume of a given cube) and squaring the circle (drawing a square with an area equal to a given circle) are among these problems which have been challenging novices and professional mathematicians for centuries. However, many geometric drawings can also be done with a straightedge and compass; like showing the position of some irrational numbers on the number line. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and, in general, the square root of any natural number can be shown on the number line by simple methods. In this paper, a method for finding the position of the inverse of any real number, including rational and irrational, whose position is given on the number line, is presented and proved, besides, its algebraic results are explained.

Keywords: Geometric Drawing, Straightedge and Compass, Number Line, Inverse of Real Numbers, Euclidean Tools.